

寻找“罗素悖论”的由来

北京大学哲学系 赵敦华

自1847年布尔提出逻辑代数以后，符号逻辑获得长足的进步。20世纪之初，弗雷格、皮亚诺等人把数学的基本概念和规则纳入逻辑演算系统，弗雷格还进一步把数学的基础归结为逻辑演算规则，其中一个关键问题是如何定义自然数。他反驳密尔认为自然数是从可感事物中抽象出来的心理主义解释。

弗雷格则坚持认为，数目是不与可感事物相对应的客观存在对象。不同于可感事物的客观存在的数目是集合。他把所有集合分为与自身相等同的集合的集合，另一类是与自身不相等同的集合的集合。在此基础上，弗雷格把数目0定义为“一切与自身不相等同的集合的集合”，数目1被定义为“一切与0相等同的集合所组成的集合”，数目2被定义为“一切与0相等同的集合和一切与1相等同的集合所组成的集合”，依此类推，可定义 $0+1+1+1+\dots$ 的一切自然数。

弗雷格的方案看似完满，罗素却看出一个漏洞，问题出在“与自身不相等同的集合的集合”，试问：这一集合与自身相等同，还是不与自身相等同呢？如果它是与自身相等同的集合的集合，那么它就是“与自身不相等同的集合”（因为集合不能与子集合相等同）；如果它是与自身不相等同的集合的集合，那么它就是“与自身相等同的集合”（因为集合与子集合的总和相等同）。这一矛盾具有“如果A是A，则A是非A；如果A是非A，则A是A”的形式，因而是一悖论。1902年6月16日，罗素写信给弗雷格告之这一发现。弗雷格读后大为震惊，他在即将出版的《算术基本法则》第2卷的结尾处写了这样一段话：“一个科学家的工作完成之日，也是这一建筑物的基础倒塌之时，没有什么比这更糟糕了，当本书即将付梓之时，罗素先生的一封信把我置于这样的境地。”

罗素在1903年的《数学的原理》中提出以适当的逻辑类型来解决集合论悖论的设想。但直到1906年之后，他才在和怀特海合作的《数学原理》里提出解决方案。据说当时世界上能看完3卷本的《数学原理》的人不超过5个，罗素拿出50英镑自费出版全书。为了普及用符号表示的集合论悖论，罗素使用了自然语言的事例。一个是“说谎者悖论”：相传古希腊的克里特岛哲学家爱比米尼说“所有克里特人都是说谎者”，他说的是真话还是谎言？如果他说的是真话，那么他就是在说谎；如果他在说谎，那么他说的就是真话。还有一个“理发师悖论”：一个乡村理发师声称他除了不给自己刮胡子的人刮胡子之外，给所有自己不刮胡子的人刮胡子。有一天他突然生疑问，他是否应该给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，那么他不能给自己刮胡子（因为他“不给自己刮胡子的人刮胡子”），但如果他自己不刮胡子，那么他必须给自己刮胡子（因为他“给所有自己不刮胡子的人刮胡子”）。这两个例子都形象地说明，一个集合的成员在规定集合属性时必然陷入这个属性既真又假的悖论。

罗素的类型理论旨在解决这样的悖论。按照这一理论，一个谓词只有用来表述较低级对象才是有效的命题，如果用来表述自身（或同一级对象）和较高级对象，则是无效的，或产生无意义的表述，或产生悖论。无意义的表述如“真理是真的”是用谓词表述自身的同义反复命题，而“红色是自然数”或“人是苏格拉底”中的谓词表述了比自身较高的对象，是没有意义的词语组合，根本不是命题。“一切与自身不相等同的集合的集合”的悖论是用集合的规定性表述集合自身，“说谎者悖论”和“理发师悖论”也是如此。

类型理论对解决自然数定义所遇到的集合论悖论或许有益，但对于论证数学的逻辑基础并没有更多帮助，因为它依赖一些未经证明的设定，比如，一切谓词及其表述的对象都能排列为不同

级别的逻辑函项式，一切函项式都可以还原为直谓式，如 fx ， Fx ，以及集合及其成员是不同级别的实体，同级实体构成实在的序列，等等，这些设定在逻辑和哲学领域引起争议。

此外，类型理论无助于消除“理发师悖论”和“说谎者悖论”，因为这类悖论涉及的是说话主体“自我指涉”的语义问题，而说话主体是否“自我指涉”取决于说话主体的规定性。“理发师”的意义不能被规定为“给所有自己不刮胡子的人刮胡子”，“说谎者”的意义也不能被规定为“克里特人”。一个理发师给别人刮胡子和照着镜子给自己刮胡子不是同一种行为，对不同行为的称谓不构成悖论。同理，身为克里特人的爱比米尼说“所有克里特人都是说谎者”不是悖论，如同身为工厂主的恩格斯说“所有资产者都是剥削者”不是悖论一样。