# "1" 是什么?

吴 锵[1] 陈亚军[2]
（1. 南京理工大学 材料系，江苏 南京 210094
2. 南京大学 哲学系，江苏 南京 210093）

**摘 要**：在分析弗雷格关于自然数定义的基础上，提出了由弗雷格的逻辑方向转为生活方向的思想。通过对日常生活中大量事例的分析，发现自然数 1 的本体论含义是，与有限性和连续性相关。

**关键词**：1；有限性；连续性
**中图分类号**：B5 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-2646(2005)06-81-05

自然数 1 的重要性无论怎样强调都不过分。在数学中，1 的基础地位毋庸置疑。在物理学中，由于物理概念根本无法离开数学描述，所以 1 也是物理学的绝对基础。除了上述这两个自然科学的基础学科，1 在日常生活中也是必不可少的，这是因为日常生活离不开语言陈述，而一段完整的语言陈述几乎都少不了 1。正因为 1 以及由 1 引申出的自然数在自然科学和日常生活中都是举足轻重的，所以古希腊的毕达哥拉斯学派认为"万物皆数"。毕达哥拉斯的弟子菲洛拉乌（philolaus）声称："一切可能知道的事物，都具有数；因为没有数而想象或了解任何事物是不可能的。"[1](p.35)这样，毕达哥拉斯学派就把属于自然科学的自然数提升到哲学的高度。在中国，先秦时期的诸子百家也是非常重视自然数的，《老子》中说："道生一，一生二，二生三，三生万物"，这种思想与毕达哥拉斯学派有着明显的相似性。然而，尽管 1 具有如此重要的地位，但人们对 1 的认识还远未达到本体论的高度，即人们仅仅认识到 1 的基础作用，而对"1 是什么？"这样的本体论问题却一直避而不谈，如毕达哥拉斯学派只是将万物归结为 1，而没有正面定义"1 是什么？"，而《老子》中也仅仅将 1 视为由"道"而生，但"道"又是什么却依然是个谜，也就是说，《老子》中给出的 1 的定义并不科学。正因为 1 的本体论意义非常深奥，所以 19 世纪德国数学家克罗内克更明确地说："整数是被亲爱的上帝造成的，其他的一切都是人的工作。"[2](p.140)

## 一、弗雷格前后的工作

真正从科学的意义上探究"1 是什么？"这个问题的，当属 20 世纪初前后的一批数学家与哲学家，其中具有代表性的是德国数学教授哥特洛布·弗雷格。20 世纪初，尽管数学已经发展成为比较完整的理论体系，但其基础却依然很脆弱，如集合论、极限理论中的一些基本概念都没有严格的定义，而所有这些问题都与自然数密切相关。这样，自然数的定义就成为数学基础研究的关键。弗雷格敏锐地注意到这一问题，他指出："对于这样一个首要的对象（指'1 是什么？'这类问题），一个看起来如此简单的对象，我们的科学却不甚了了，这是不是一个丑闻？如果一个强大科学的基本概念发生了困难，那么，对它加以进一步的研究，克服这些困难，便成为当务之急，否则，我们最终将弄不清负数、分数或复数，我们对算数整体结构的基础的看法总是有缺陷的。"[3]应该指出的是，尽管弗雷格对数学基础状况的认识是准确的，但他自己运用"类"的概念给出的自然数定义却遭遇到著名的罗素悖论，因此弗雷格努力的最终结果是失败的。与弗雷格同时代的数学家罗素和皮亚诺也都非常重视自然数的定义问题，罗素在发现了罗素悖论之后，就自

**收稿日期**：2005 - 07 - 23
**作者简介**：吴 锵（1960 - ），男，江苏靖江人，南京理工大学材料系教授、工学博士。

已着手解决这一问题，他提出了著名的类型理论，以便克服自我指称造成的恶性循环。但是，罗素的理论带来了一些新的问题，所以无论哲学界还是数学界，现在都很少有人使用类型理论。皮亚诺的自然数系包含了以下概念：0、数、后继、且不谈皮亚诺的公理体系，仅仅从他提出的这三个基本概念，就能看出皮亚诺的理论解决不了“1是什么？”这样的问题，因为在他的理论体系中，0和数等概念都是不加定义的原始概念，而且皮亚诺的早期工作是以1为原始概念的[4](p.301)。不难看出，尽管罗素、皮亚诺等在数学基础的公理化方面进行了大量工作，但他们对“1是什么？”这一最根本问题的研究并没有在本质上超越弗雷格。同时，弗雷格的研究“范式”也明显地影响到“1是什么？”的后续研究，这一点在罗素与皮亚诺的工作中最为突出。正因为如此，“1是什么？”的科学研究虽然经历了百年，但目前的研究状况依然停留在弗雷格的水平上，即仍然从无法定义或感知的“类”概念出发，来定义自然数。因此，数学“至今还没有从数学的第三次危机中真正解脱出来。”[5](p.47)

## 二、本文的分析思路

本文认为，要想真正搞清楚“1是什么？”，还要重新考察弗雷格的工作。从宏观的层次上讲，弗雷格定义“1是什么？”的思路是正确的，即他将着眼点指向数学以外，而不是数学内部。这从逻辑上看无疑是正确的，因为1是数学的绝对基础，所有的数学概念都是建筑在1之上的，因此从数学内部寻求“1是什么？”显然不合逻辑。但是，当弗雷格将着眼点指向数学以外后，他却犯了方向性的错误，即将着眼点指向了逻辑学，用比1更为抽象的“类”概念定义1。由于“类”难以把握，所以基于“类”概念的自然数理论遭遇了罗素悖论。作为哲学家，弗雷格被公认为分析哲学的奠基人，其哲学思想的精髓自然是分析，即力图澄清所有模糊不定的东西，因此弗雷格最先认识到自然数(当然包含1)基础的模糊是很容易理解的，因为在弗雷格之前，还没有关于1的科学定义。但是，分析哲学家的气质使得弗雷格在定义自然数时努力的方向产生了偏差，他过分注重自然数体系的逻辑清晰，而忽略了定义过程的坚实性。一般来说，逻辑清晰性与坚实性往往是相容的，清晰的东西、逻辑性强的东西通常都是坚实的和可靠的。但是，在涉及基础的时候，当面对最基本概念的时候，逻辑清晰性与坚实性就可能背道而驰，对逻辑清晰的过分追求会导致其坚实性的下降，即可靠性下降，因为涉及基础问题时，逻辑的视野与坚实的视野不一定存在于同一方向。以弗雷格的工作为例，追求逻辑清晰就不得不动用更为抽象的“类”概念和比较模糊的“后继”概念，这样做虽然使得自然数有清晰的定义(此处清晰的真实含义是简洁与看上去自身协调)，但其可靠性与坚实性却出了问题，即遭遇了罗素悖论。考虑到弗雷格数学家的背景，追求逻辑清晰是很自然的事情。但是，科学定义的最终目的不仅仅是清晰，它更要依靠坚实，定义的终极目标应该是坚实基础上的逻辑清晰，而不是以牺牲坚实性为代价来换取逻辑清晰。因此，在“1是什么？”的研究中，当我们将目光指向数学以外的其他领域时，首先想到的应该是哪一个领域更加坚实可靠，而不是哪一个领域逻辑更加清晰。

一般来说，坚实性寻求的方向不外乎三个，即历史、自然科学与日常生活。对于“1是什么？”这个问题，前面已经证明向历史中寻求是行不通的，因为弗雷格之前没有关于1的真正本体论定义，而弗雷格之后的工作又没有超越弗雷格。因此，弗雷格本人的失败就意味着“1是什么？”定义的整体失败。向自然科学中寻求也是行不通的，因为1是整个自然科学的基础，所以对1的定义不能使用自然科学的理论体系，反过来讲就是，不能指望从自然科学的理论体系中推演出“1是什么？”。这样，1的意义之源就只剩下日常生活了，即我们要在日常生活中去寻求“1是什么？”。具体方法是，从日常生活中选取那些被公认为具有1的特征的事物，然后进行归纳总结，以便最终提炼出构成1的要素。即使是日常生活，也要把着眼点放到日常生活的原初，即人类生活的开始。其具体含义是，着眼于人刚刚开始生活的时候，也就是婴幼儿时期。因为在这一时期，人所接触的是一些原始的概念，而当人长大成人之后，1的概念已经完全建立了，这个时期关于1的各种问题都不能显示1的初始状态，它们都是以1为基础的派生状态。关于这一点，只要看看从小学到大学的数学教材就清楚了，因为大学教材虽然远比小学教材深奥，但还是没有关于“1是什么？”的解答，也就是说，在这个数学的最基本的问题上，小学生与大学生甚至研究生的认识水平没有什么差别，对此进行反推，则从婴幼儿的认识过程中寻求“1是什么”自然是合理的选择。通过对婴幼儿的考察，我们能够避免“1是上帝赐予的”或“1就是1+1=2中的1”这一类回答，因为这类回答都不是本体论的，它们的一个共同特点是，假定已知了“1是什么？”，然后再赋予1以更多的含义，而我们所关心的

是 1 的本体论意义，或者说原初意义。

## 三、1 的定义

由于 1 的探究是非常复杂的事情，所以在下面的讨论中，为了叙述简洁，我们首先给出“1 是什么？”的初步本体论答案，并对给出方法和结论分别予以论证。然后，根据论证过程得到的新启示，作进一步修正，以便使“1 是什么？”的回答更为严密。作为本文的中心，我们初步认为：

1 是具备有限性和内部连续性的所有对象的属性的交集。

由于这一初步定义是首次提出的，所以先对其作一个简要的说明。定义中的对象是哲学意义上的对象，它可以是实物客体，如石头、树、排球、电子，也可以是抽象的东西，如质点、万有引力定律、诗。总之，凡是人们感兴趣、想关心的事与物都是我们所说的对象。明确了对象之后，就可以将 1 表述为：如果对象是有限的，并且同时是内部连续的，则所有具备这两个特点的对象的属性的交集，就构成了 1。强调内部连续是与有限性相关的，因为存在有限性，所以可以将事物分为内与外，而我们关注的是处于内部的有限的事物。至于属性的交集，其作用是剔除一切与 1 的本体论意义不相干的因素，如红苹果与黄苹果的交集能够剔除颜色因素；大人与小孩的交集能剔除年龄因素；而苹果与人的交集则剔除了物质状态的因素。将交集操作一直进行下去，则最终得到的就是真正属于 1 的因素。因此可以说，1 是关于事物的有限性和连续性的抽象。

实证 1，婴幼儿学习 1 的过程。

事实上，当儿童进入小学时，他们已经具备了抽象的 1 的概念。当老师提及 1 时，他们心目中形成的不是 1 的具体形象，如一支笔、一个苹果或一棵树，而是抽象的 1。由于抽象的 1 的概念在小学前就建立了，所以这个概念看上去非常简单，以至于用不着小学来讲授了。但是，如果回顾一下婴幼儿关于 1 的学习过程，就会发现情况并非如此。最初的时候，父母很可能使用手指作为教具来讲授 1。当父母将食指竖起并放到孩子的眼前时，会发出 1 的声音。第一次教学的效果如何呢？孩子学到了什么？这个时候孩子一边观察食指，一边听到了 1 的声音。如果仔细回忆的话，我们会注意到这样一个现象，那就是父母在竖起食指时，会小心地将食指上部放到孩子的眼前，而绝对不会将食指举得过高，以致于指根甚至手掌都暴露在孩子的眼前。这个做法虽然是父母下意识的行为，但其中包含了关于 1 的深刻道理。当食指的上部放到孩子的眼前时，他们观察到的是具有鲜明边界的物体，食指上部与周围的空气具有明显的反差，使得孩子一下子将注意力集中到食指上部。进一步回忆一下，展示鲜明的边界是进行 1 的教学的必不可少的前提，如使用一根筷子作教具时，父母不会把抓住筷子的手暴露在孩子眼前，而是尽可能让孩子观察到具有鲜明边界的筷子；当使用一个苹果作教具是，父母会拎住苹果的蒂(俗称把儿)，而不会把苹果抓在手里，然后放到孩子眼前。反过来讲，父母在进行 1 的教学时，是不会利用边界模糊的东西的，如指着遮天蔽日的大片云，然后说这是一片云，或在海边指着一望无际的大海，去说这是一个海。只要是略有经验的父母，都不会按这种方式教孩子，尤其是 1～2 岁的小孩子。边界的概念将客观世界分为边界以内的部分和边界以外的部分，而人由于自身能力的局限性，所以天然地关注边界以内的世界，也就是有限的世界，因此有限性是自然数 1 的要素。只有有限的对象，才是人的观察与思维能力所能承受的；对于无限的东西，人只能通过有限的方式、一点点去逼近它，而不可能同时将它全部收入观察与思考的视野。

实证 2，两个沙堆合二为一。

假定有两堆沙子，由于它们都有清晰的形状，并且相互分开，所以非常容易辨认，即辨认出它们不是一堆沙子。如果将一堆沙子铲到另一堆上，从而变成了一(大)堆沙子，我们来分析一下这个过程。很明显，有限性在这个过程中没有发生变化，因为无论是一(大)堆沙子还是两堆沙子，它们都是有限的，都在人的观察视野和思考范围之内。那么，在这个过程中是什么发生了变化呢？最容易想到的是沙堆的体积发生了变化，从两个小的，变成了一个大的。但是，由于我们考察的是自然数 1，所以大沙堆与小沙堆是没有差别的，这样就排除了体积因素。与体积类似，沙堆高度也是如此，即虽然沙堆高度可能发生变化，但这种变化与自然数 1 没有关系。事实上，沙堆的实质性变化是连续性，因为两堆沙子之间是不连续的，而合二为一后变得整体连续了，是这种连续性的变化导致我们关于沙堆的概念由 2 变成了 1。概括起来讲就是，自然数 1 要求考察对象内部必须具有连续性。建立了连续性的概念后，我们就可以回头考察用食指进行 1 的教学的

过程。在那里，也是要求对象(食指)具有内部连续性的，只不过食指的连续性是天然的，所以不容易被人们注意到。

实证3，一根筷子一分为二。

为了进一步说明连续性的问题，还可以从反面来考察，即考察一根筷子被锯成两节的过程。当这根筷子被锯断之前，人人都会说这是1根筷子，而当它被锯断后，则会说它变成了2节。从物理上讲，锯断过程只不过是在筷子的中部，将筷子分子间的结合键破坏掉，除此之外锯断过程没有别的作用。分子键的破坏意味着原来的整根筷子在内部产生了断裂，即出现了不连续。正是这种不连续，才导致对这根筷子的数字描述从1变成了2！需要说明的是，我们所说的不连续是整体的不连续，即真正地断为两节、而当筷子被锯到一半时，虽然内部有了不连续，但这仅仅是局部的不连续，这时的筷子仍然被称为是1根筷子，尽管这根筷子有了锯口。

这样，我们通过一些实证的例子，初步论证了自然数1是关于对象有限性和连续性的抽象。下面的问题是，要对上述分析进行方法论的探究，以便整体把握上述分析的正确性。首先，有限性是一个很容易证明的概念，这是因为人的视野、注意力等均是有限的，不可能同时关注无限的事物，因此1与有限性相关是很自然的。其次，1与连续性的关系。上述关于连续性的论证都是针对日常生活中的事例，论证的“范式”是物理学的，如使用了有限性、连续性等典型的物理学概念。现在的问题是，在物理世界以外的其他领域，连续性还是不是1的必备要素？例如，一件事情，我们在这里还能使用一的概念吗？这个一是不是仍然具备内部连续的含义呢？事实上，一件事情之所以称为一件，是因为这件事内部的各组成部分之间有相互关联，如果某个部分与其他部分没有任何联系，则人们自然会将该部分从这件事中去除掉。同样，一首诗之所以作为一个整体来看待，必定是这首诗的各句子之间有相互关联，否则是不能称为一首诗的。不难看出，关于连续性的论证既包括了物理世界的事物(如食指、沙堆和筷子)，又包括了抽象的事物(如一件事、一首诗)，同时我们迄今找不到反例，所以本文认为连续性可以作为自然数1的要素。

事实上，如果仔细反思以上论证过程，最为麻烦的问题反而是论证中的陈述，因为我们在论证过程中使用了1的概念来陈述自己的思想，如前面提到的“第一次教学”、“注意到这样一个现象”、“将两堆沙子放在一起，从而变成了一堆沙子”等等。应该指出的是，我们在作这些陈述时，还没有确定1到底是什么，即这些陈述中的“一”统统是缺乏定义的概念。现在的问题是，我们能不能用这些缺乏定义的“一”去刻画自然数1的科学定义？进一步讲，这样做会不会犯逻辑循环的错误？顺便指出，弗雷格在定义自然数时，就犯了这样的错误，这一点只要注意到他将1定义为“×××的集合”就能发现，因为集合本身的含义就是一个整体[6](p.16)，即弗雷格定义1时动用了1。一般来说，逻辑循环是科学定义的大忌，所以通常都要避免定义中的逻辑循环。但是，当涉及绝对基础性的问题时，当需要定义的概念已经没有了公认的上位概念(或属概念)时，逻辑循环就是我们不得不面对的问题。解决这一问题要从两个方面入手，一方面是仍然遵循科学定义的规则，即在定义的表述中不使用被定义的字眼。另一方面，由于精炼的定义表述本身如果不加以解释就无法被人们理解，所以必须对给出的定义进行解释。在解释的过程中，则允许使用被定义的字眼，否则我们就无法表达自己的思想，至少是无法清楚地表达思想，而这中间涉及的逻辑循环问题，可以借用代数学中设x的思想方法加以解决。在代数学中，当某个未知的数需要被确定时，总是先假设其为x。从逻辑上讲，这个未知数x理所当然是未知的，因此也就是不确定的。但是，在代数学的解方程过程中，我们实际上把这个x当成确定的东西来处理，因为解方程中必然要使用数的四则运算，而四则运算是关于确定的东西(即确定的数)的，对本身不定的东西，是没有运算规则的。为什么代数学中可以将原本不确定的x当成确定的东西呢？这里边涉及一个最基本的原理，即检验原理，因为代数学要求，在确定出x的具体数字之后，必须再将其代回方程进行检验，看方程两边是否相等。因此，代数学中真正保证逻辑上成立的，是最终的检验过程，因此将不确定的东西当成确定的，也就无可厚非了。根据这一原理，我们就可以先使用“一”的概念，当最终得出1是关于有限性和连续性的抽象之后，再回过头来用有限性和连续性的思想去检验曾经提及的那些“一”，如“第一次教学”、“注意到这样一个现象”、“将两堆沙子放在一起，从而变成了一堆沙子”等等。值得庆幸的是，所有的检验都是合格的，如“第一次教学”，它确实与有限有关，因为教学不可能是无限过程，同时，“第一次教学”必然与“第二次教学”有明确的区分，即这两次之间一定中断过，否则就会统称为一次教学了。至此，我们关于“1是具备有限性和连续性的所有对象的属性的交集”

的论证才算真正完成，但完成之时也正是对这个初步定义作进一步修改之时，因为定义的表述中涉及了集合(定义中有交集的字眼)，即前面的初步定义实际上是弗雷格式的，而我们已经指出，弗雷格式的定义还犯了逻辑循环的错误。因此，真正严格的界定应该是：

1 与对象的有限性和连续性相关。

尽管本文的标题是“1 是什么？”，但论述到此的结论却是否认了这个命题。这说明，像 1 这样的东西是无法用“是什么”来陈述的，因为已经没有什么可以作为 1 的属概念，所以“属 + 种差”的方式在 1 的定义中是不能采用的。

不难看出，在“1 是什么？”的研究中，尽管我们将着眼点集中到日常生活，但在定义的论证中却最终使用物理学概念，从而把 1 与物理世界的一些基本属性联系起来。由于有限性与连续性都是可以检验的，因此 1 的定义有了坚实的、可检验的基础。通过有限性和连续性，我们就可以检验研究对象是不是 1，从而将 1 的判定从传统的经验模式上升到理论模式。很明显，本文的研究相对于弗雷格已经有了重大的转向，从弗雷格的逻辑方向转移到物理学的方向。同时，可检验性使得 1 不再具有以往的神秘色彩，它既不是“上帝造成的”或由“道”产生的，也不是什么更加抽象的“类”(或集合)，而是连儿童都能感受到的有限性和连续性的体现。正因为有限性和连续性广泛地存在于日常生活或科学技术的各个方面，所以尽管 1 是一个非常抽象的概念，但只要具有基本智力的人，都能熟练地掌握 1 的概念，灵活地运用 1，创造出一个个与 1 有关的新概念与新事物。同时，明确了 1 与连续性相关，还能顺带解释 2 的起源问题，因为迄今为止还没有人论述过为什么会有 2。即使是弗雷格也仅仅定义了 2 是什么，而没有对 2 为什么会存在这个更基本的问题作过任何评述。弗雷格显然是将 2 视为理所当然存在的、天然的事物，即先肯定了 2 的存在，然后再定义 2 是什么，但 2 为什么会存在却是弗雷格思想体系所无法回答的问题。然而，如果从连续性的概念出发，则很自然地会涉及到 2 的概念，因为世界万物不是联结为一个整体的，既然有连续性，则必然有不连续性，2 一定与不连续相关，这一点在沙堆的论证中已经讨论过了。至于 2 到底是什么？则是另外一个更为复杂的课题，它不在本文的讨论范围内。

**参考文献**

[1] T・丹齐克. 数—科学的语言[M]. 北京：商务印书馆，1985.

[2] 斯特洛伊克. 数学简史[M]. 北京：科学出版社，1956.

[3] Frege, The Foundation of Arthmetic, transl. By J.L. Austin, Northwestern University Press, 1968, p. ii, v.

[4] 王宪钧. 数理逻辑引论[M]. 北京：北京大学出版社，1982.

[5] 朱梧贾，肖奚安. 数学基础概论[M]. 南京：南京大学出版社，1996.

[6] K.G.宾莫尔. 数学分析基础浅导[M]. 徐信之译. 北京：北京大学出版社，1989.

（**责任编辑：**张叔宁）

## What is “Natural Number 1”?

Wu Qiang Chen Yajun

**Abstract:** Based on the ontological analysis of Frege′s defination for natural number , it is proposed that the defination of natural number should turn from Frege′s logic direction to everyday life. Through the analyses of many examples in everyday life, it is found that the ontological meaning of natural number 1 is related to limition and continuation.

**Key words:** 1; limition; continuation; natural number